Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

Bloque 6

Geometría analítica

Módulo 7

LAS CÓNICAS Y LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Conrado Flores García

trillas

SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

LAS CÓNICAS Y LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. Introducción a la geometría analítica
2. La recta
3. La circunferencia
4. La elipse
5. La hipérbola
6. La parábola
7. ***Las cónicas y la ecuación general de segundo grado***
8. Relaciones y lugares geométricos.

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior

$AX^2+bX+c=0$

Módulos de matemáticas

Bloque 6
Geometría analítica

Módulo 7

LAS CÓNICAS Y LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

La presentación y disposición en conjunto de
LAS CÓNICAS Y LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984 Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340 México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-0838-5

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

7.1 Traslación de ejes coordenados 9

7.2 Rotación de ejes coordenados 27

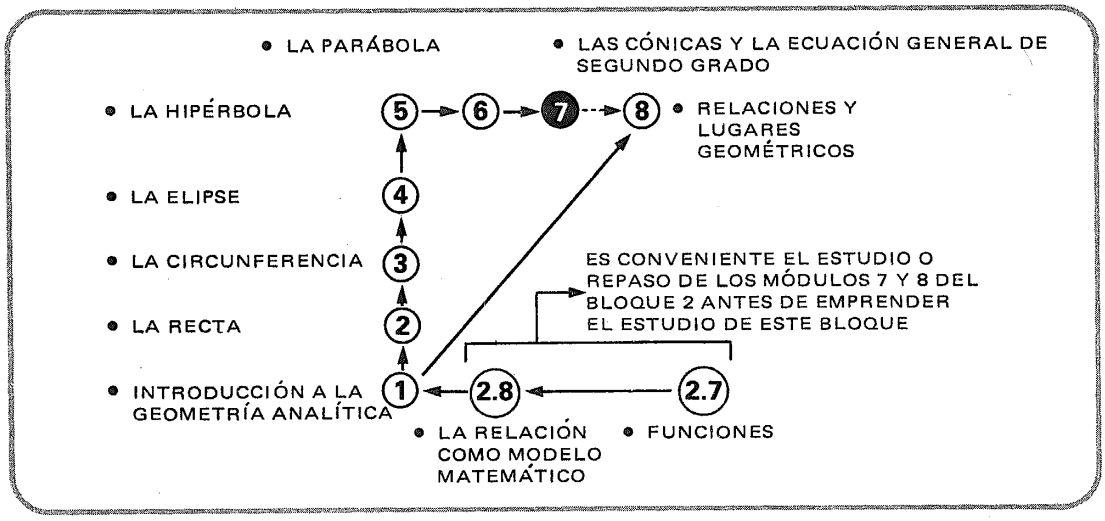
7.3 La ecuación completa de segundo grado con dos variables 56

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 6. Geometría analítica

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades cualesquiera

Esquema estructural del bloque 6



Módulo 7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico definido por una ecuación de segundo grado

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Los números complejos (concepto y manejo)	1	14
• Resolución de ecuaciones de primer y segundo grados	2	2, 5
• Las funciones trigonométricas directas o inversas	5	1, 3, 4, 5
• Identidades y ecuaciones trigonométricas	5	6, 8
• Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola	6	3, 4, 5, 6

7.1

Traslación de ejes coordenados.

1

Dada la ecuación cuadrática con dos variables,

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

necesitamos saber qué conjunto de puntos representa en el plano cartesiano.

2

La ecuación

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

es de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Observamos que $A \neq C$ y $AC > 0$ { A y C son diferentes y del mismo signo;

por lo tanto, la ecuación dada puede representar:

- una elipse con ejes paralelos a los coordenados
- una curva degenerada
- o ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

3

Vamos a representar
gráficamente
la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

llevándola previamente
a alguna de las
formas ordinarias

ó

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

4

Estado inicial. $4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$

Transformaciones:

Estado final:

$$4x^2 - 24x + 9y^2 + 36y = -36$$

$$4(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 4y) = -36$$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 4y + 4) = -36 + (4 \cdot 9) + (9 \cdot 4)$$

$$4(x-3)^2 + 9(y+2)^2 = 36$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

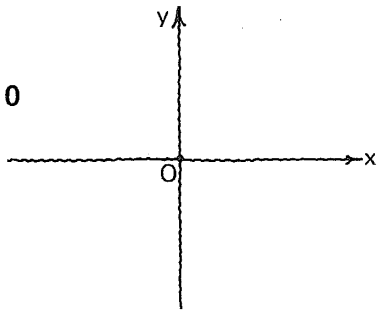
5

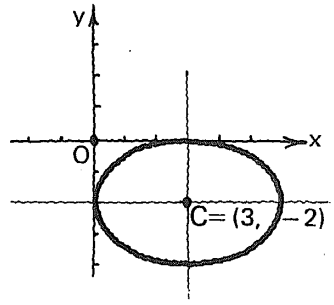
Gráfica cartesiana de

$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$

ó

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$



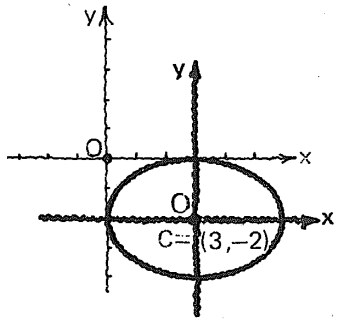


Vemos que se trata de
una elipse horizontal
con centro en (3, – 2).

6

Atención.

Ahora, consideremos **un nuevo sistema de ejes coordenados** paralelos a los iniciales y **con el origen en O = C = (3,– 2).**



¿Cuál sería una ecuación para esta elipse, referida al nuevo sistema coordenado?

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

ó

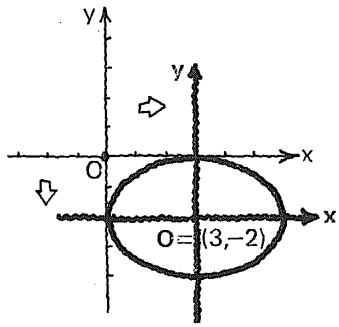
$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

7

Decimos que ha habido una

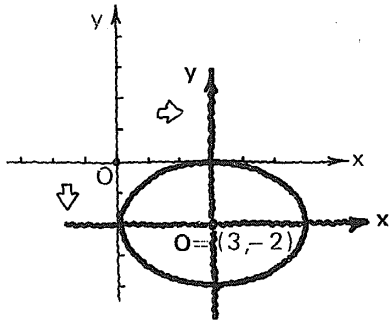
traslación de ejes

en el plano cartesiano, o que los ejes x e y han sido trasladados a los ejes **x** e **y**, con origen en (3,– 2).



8

Observamos que la forma y la posición de la elipse no han cambiado al efectuarse esta traslación de ejes; de hecho, se trata del mismo conjunto de puntos en el plano cartesiano, pero su ecuación sí ha sido modificada.



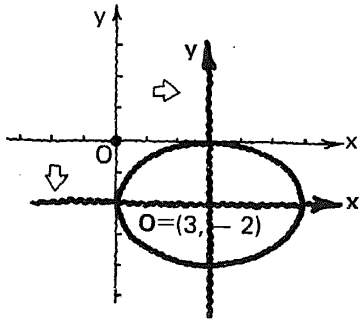
9

$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$

$\Downarrow$

$\mathbf{4x^2 + 9y^2 - 36 = 0}$

La ecuación de la elipse ha sido notablemente simplificada al efectuarse la traslación de los ejes al nuevo origen.



10

$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$

$\Downarrow$

$\mathbf{4x^2 + 9y^2 - 36 = 0}$

Notamos que la ecuación referida al nuevo sistema de ejes

no contiene términos de primer grado

(es decir términos en x o en y).

11

Cuando se requiera

expresar una ecuación

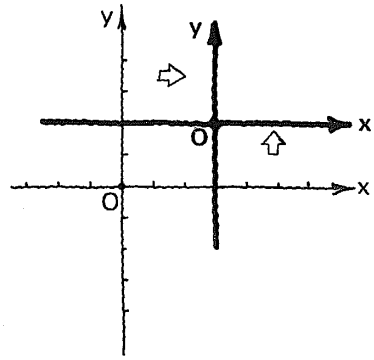
de un cierto conjunto de puntos

en una forma más simple

podemos recurrir a este artificio trasladando los ejes a un nuevo origen convenientemente seleccionado.

12

Vamos a estudiar un procedimiento para efectuar esta traslación de los ejes coordenados a un nuevo origen.



13

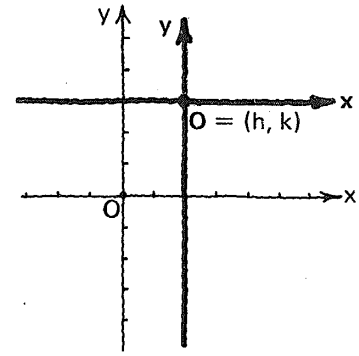
x o y
es el sistema original, y

x o y

el nuevo sistema con origen en **O** = (h,k).

Se verifica:

$\overleftrightarrow{\mathbf{ox}} \parallel \overleftrightarrow{\mathbf{ox}}$ y $\overleftrightarrow{\mathbf{oy}} \parallel \overleftrightarrow{\mathbf{oy}}$



14

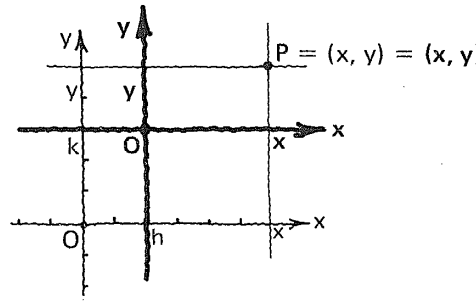
P es un punto cualquiera en el plano cartesiano.

Si observamos atentamente la figura, podemos escribir:

$x = \mathbf{x} + h,$

y

$y =$ ⌊_____⌋



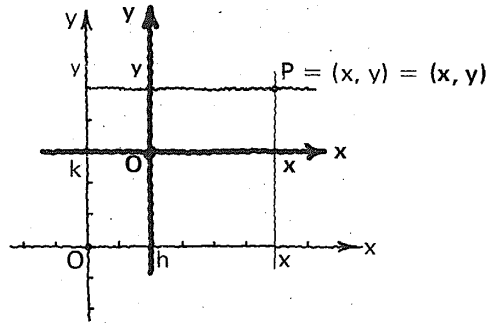
y + k

15

O bien;

$x = \boxed{\qquad}$

$y = \boxed{\qquad}$



$x - h$

$y - k$

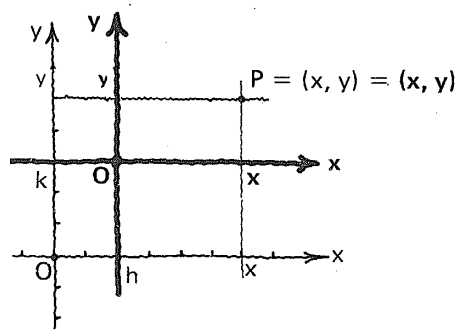
16

Éstas son las llamadas

ecuaciones para la traslación de ejes.

$$\begin{bmatrix} x = x + h \\ y = y + k \end{bmatrix}$$ para trasladar el origen de O = (0,0) a O = (h,k).

$$\begin{bmatrix} x = x - h \\ y = y - k \end{bmatrix}$$ para trasladar el origen de O = (h,k) a O = (0,0).



17

Veamos cómo funciona esto para la ecuación de la elipse antes considerada.

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

Se requiere una ecuación más simple, referida a un nuevo sistema de ejes coordenados.

18

Procedimiento alternativo 1.

1. Llevamos la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

a la forma ordinaria

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

con lo cual sabemos que el nuevo origen es el punto $(3, -2)$.

19

2. En la ecuación original

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

o mejor, en la ecuación ordinaria

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

sustituimos $\begin{cases} x = x + h = ____ \\ y = y + k = ____ \end{cases}$

con lo cual obtenemos:

____

- $x + 3$
- $y - 2$
- $\frac{(x+3-3)^2}{9} + \frac{(y-2+2)^2}{4} = 1$

  ó

  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

20

Procedimiento alternativo 2.

1. En la ecuación original

$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$$

sustituimos $\begin{cases} x = x + h, \\ \text{e} \\ y = y + k, \end{cases}$

obteniendo:

____

- $4(x+h)^2 + 9(y+k)^2 - 24(x+h) + 36(y+k) + 36 = 0$

  ó

- $4x^2 + 9y^2 + (8h - 24)x + (18k + 36)y + 4h^2 + 9k^2 - 24h + 36k + 36 = 0$

21

2. Como la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 + (8h - 24)x + (18k + 36)y + 4h^2 + 9k^2 - 24h + 36k + 36 = 0$$

debe carecer de términos de primer grado
(es decir, término en **x** y término en **y**)
debe verificarse que:

$$8h - 24 = 0$$

y

$$\square$$

$18k + 36 = 0$

22

3. Resolvemos el sistema

$$8h - 24 = 0 \quad (1)$$

$$18k + 36 = 0 \quad (2)$$

De 1 obtenemos h = $\square$

y de 2 obtenemos k = $\square$

3

-2

23

4. Para $h = 3$ y $k = -2$
la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 + (8h - 24)x + (18k + 36)y + 4h^2 + 9k^2 - 24h + 36k + 36 = 0$$

se transforma en:

$$\square$$

$4x^2 + 9y^2 + 36 + 36 - 72 - 72 + 36$

ó

$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

ó

$4x^2 + 9y^2 = 36$

ó

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

24

Otro ejemplo.

Se requiere reducir a su forma más simple la ecuación

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 26 = 0,$$

mediante una traslación de ejes, y determinar la naturaleza del conjunto de puntos representado.

25

La ecuación

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 26 = 0$$

puede representar:

- ____
- ____
- ____

una circunferencia

un punto

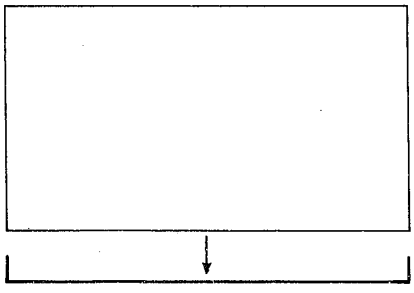
ningún conjunto de puntos puesto que A = C

26

Procedimiento alternativo 1.

1. Poner la ecuación $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 26 = 0$

   en la forma ____



- $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

- $4x^2 + 4x + 4y^2 - 12y - 26 = 0$
- $4(x^2 + x) + 4(y^2 - 3y) = 26$
- $4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = 36$
- $4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 36$

- $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 9$

27

El origen del nuevo sistema de coordenadas es el punto [ ]

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Las ecuaciones de traslación son:

$x =$ [ ]

$\mathbf{x} - \frac{1}{2}$

$y =$ [ ]

$\mathbf{y} + \frac{3}{2}$

28

2. Sustituyendo

$$x = \mathbf{x} - \tfrac{1}{2}$$

e

$$y = \mathbf{y} + \tfrac{3}{2}$$

en

$$\left(\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{y} - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \mathbf{9}$$

obtenemos:

[ ]

$\mathbf{x^2 + y^2 = 9}$

29

Procedimiento alternativo 2.

1. Sustituir en la ecuación

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 26 = 0$$

$x =$ [ ]
e
$y =$ [ ]

$\mathbf{x} + h$

$\mathbf{y} + k$

30

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 26 = 0$$

$x = x + h$
$y = y + k$

$$4(x+h)^2 + 4(y+k)^2 + 4(x+h) - 12(y+k) - 26 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 + (8h+4)x + (8k-12)y + 4h^2 + 4k^2 + 4h - 12k - 26 = 0$$

31

2. En

$$4x^2 + 4y^2 + (8h+4)x + (8k-12)y + 4h^2 + 4k^2 + 4h - 12k - 26 = 0$$

debe verificarse:

y

$$8h + 4 = 0$$

$$8k - 12 = 0$$

32

De $8h + 4 = 0$ $\quad h =$ ____

De $8k - 12 = 0$ $\quad k =$ ____

$-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$

33

Para $h = -\frac{1}{2}$ y $k = \frac{3}{2}$

la ecuación

$$4x^2 + 4y^2 + (8h + 4)x + (8k - 12)y + 4h^2 + 4k^2 + 4h - 12k - 26 = 0$$

se transforma en

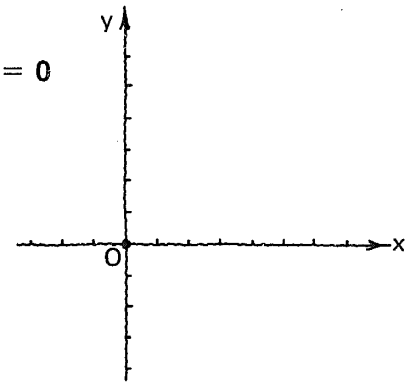
$4x^2 + 4y^2 = 36$
ó
$x^2 + y^2 = 9$

34

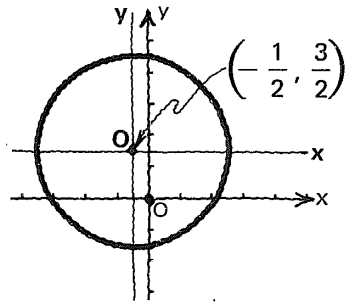
Entonces, podemos decir que la ecuación

$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 26 = 0$

representa



Trazar su gráfica cartesiana.



- una circunferencia de radio 3 con centro en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

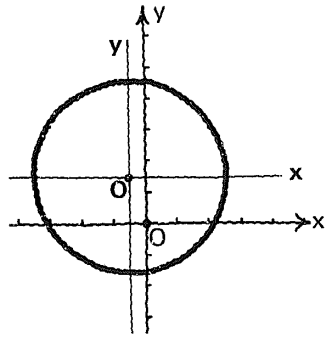
35

Una ecuación de la circunferencia representada, referida al sistema coordenado xoy es

$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 26 = 0.$

Otra ecuación de la misma circunferencia, pero referida al sistema coordenado **xoy**, es

$x^2 + y^2 = 9.$



36

Tenemos, ahora, la ecuación

$$2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y + 18 = 0$$

que queremos expresar en su forma más simple, determinando la naturaleza del conjunto de puntos que representa en el plano cartesiano.

37

$$2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y + 18 = 0$$

Puesto que $AC < O$ (es decir, A y C son de signos contrarios) esta ecuación puede representar:

- ⌊_____⌋

ó

- ⌊_____⌋

una hipérbola

un par de rectas concurrentes (hipérbola degenerada)

38

Procedimiento alternativo 1.

Ecuación dada $2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y + 18 = 0$

Ecuación simplificada ⌊_____⌋

$$2x^2 - 12x - 3y^2 + 12y = -18$$
$$2(x^2 - 6x) - 3(y^2 - 4y) = -18$$
$$2(x^2 - 6x + 9) - 3(y^2 - 4y + 4) = -12$$
$$2(x-3)^2 - 3(y-2)^2 = -12$$
$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{6} = 1$$

ecuaciones de traslación:
$x = \mathbf{x} + 3$

$y = \mathbf{y} + 2$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$$

39

Procedimiento alternativo 2.

Ecuación dada $2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y + 18 = 0$

Ecuación simplificada

Respuesta en el cuadro siguiente

- $2(x + h)^2 - 3(y + k)^2 - 12(x + h) + 12(y + k) + 18 = 0$
- $2(x^2 + 2hx + h^2) - 3(y^2 + 2ky + k^2) - 12x - 12h + 12y + 12k + 18 = 0$
- $2x^2 + 4hx + 2h^2 - 3y^2 - 6ky - 3k^2 - 12x - 12h + 12y + 12k + 18 = 0$
- $2x^2 - 3y^2 + (4h - 12)x - (6k - 12)y + 2h^2 - 3k^2 - 12h + 12k + 18 = 0$

De $(4h - 12) = 0$ $\quad h = 3$

De $(6k - 12) = 0$ $\quad k = 2$

Para $h = 3$ y $k = 2$ {

$2x^2 - 3y^2 + 12 = 0$

ó

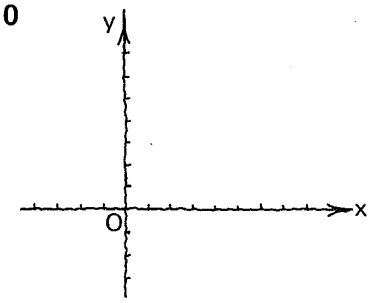
$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$

40

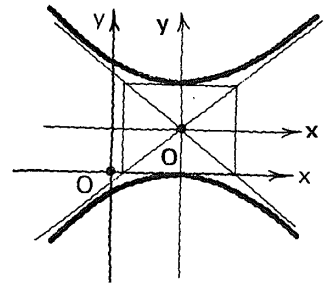
La ecuación

$2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y + 18 = 0$

representa



Trazar su gráfica cartesiana.

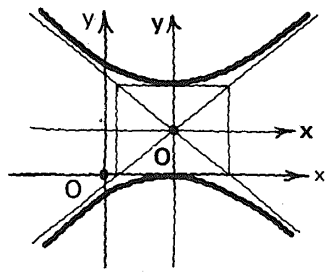


- una hipérbola vertical con centro en (3,2)

41

Una ecuación de la hipérbola representada es

$2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y + 18 = 0$



referida al sistema de ejes xoy.

Otras ecuaciones de la misma hipérbola son:

$2x^2 - 3y^2 + 12 = 0$

ó

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$

referidas al sistema **xoy.**

42

Queremos simplificar la ecuación:

$$y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$$

mediante una traslación de ejes coordenados y conocer la naturaleza del conjunto de puntos representado.

43

La ecuación dada:

$$y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$$

puede representar

- una parábola con eje paralelo a uno de los ejes coordenados
- dos rectas paralelas
- una recta
- ningún conjunto de puntos

puesto que: $A = 0 \wedge C \neq 0$.

44

Ecuación dada $y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$

Ecuación simplificada

Conjunto de puntos representado

$y^2 - 8y - 8x + 16 = 0$

$y^2 - 8y + 16 - 8x + 16 - 16 = 0$

$(y-4)^2 - 8x = 0$

$(y-4)^2 = 8x$

Ecuaciones de traslación:

$x = x$

$y = y + 4$

$y^2 = 8x$ ó $(y^2 - 8x = 0)$

parábola horizontal con vértice en (0, 4)

6.7.1.1

Práctica adicional de simplificación de una ecuación dada de la forma: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ mediante una traslación de ejes coordenados, si se considera necesario.

45

Ahora bien, nosotros hemos hecho uso de las expresiones:

$$x = x - h$$
$$y = y - k$$

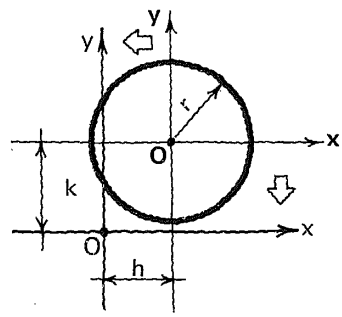
trasladando el origen

de $O = (h,k)$ a $O = (0,0)$,

para establecer la ecuación de una cónica con centro (o vértice) en (h,k) a partir de una ecuación de la cónica con centro o vértice en el origen (0,0).

46

Por ejemplo, una ecuación de la circunferencia que se muestra, referida al sistema cartesiano **xoy**,



es [ ]

Al trasladar los ejes a la posición xoy, sustituyendo:

$\mathbf{x} = x - h$
$\mathbf{y} = y - k$

la ecuación anterior se transforma en

[ ]

$x^2 + y^2 = r^2$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

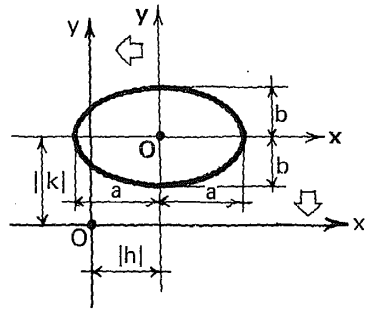
47

La ecuación de la elipse mostrada se transforma de

[ ]

a

[ ]



al ser trasladado el origen de **O** a O.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

48

En la misma forma hemos obtenido

de [ ]

[ ]

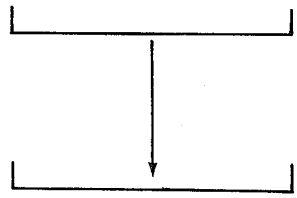
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

para una hipérbola horizontal con semieje transverso igual a **a**, y semieje conjugado igual a **b**.

49

Y de



hemos obtenido

para una parábola horizontal con lado recto igual a 4p.

$y^2 = \pm 4px$

$(y - k)^2 = \pm 4p\,(x - h)$

6.7.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las expresiones:
  $x = x + h$
  e
  $y = y + k$
  para la traslación de los ejes coordenados;

- *simplificar* una ecuación dada de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, mediante una traslación de ejes coordenados, estableciendo la naturaleza del conjunto de puntos representado en el plano cartesiano;

- *establecer* una ecuación de una cónica con centro o vértice en (h,k), a partir de una ecuación de la cónica con centro o vértice en (0, 0); mediante una traslación de ejes coordenados.

7.2

Rotación de ejes coordenados

50

Hemos estudiado todos los posibles conjuntos de puntos que puede representar la expresión

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $A,C,D,E,F \in \mathbb{R}$

ecuación general incompleta de segundo grado con dos variables.*

* Decimos "incompleta" porque falta en el término Bxy.

51

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A,C,D,E,F \in \mathbb{R}$

Sabemos que, si A = C, la ecuación representa:

- una circunferencia

o

- un punto

o

- ningún conjunto de puntos (ϕ)

52

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A,C,D,E,F \in \mathbb{R}$

Si $A \cdot C < 0$
la ecuación representa:

- una hipérbola con ejes paralelos a los coordenados

o

- un par de rectas concurrentes

53

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A,C,D,E,F \in \mathbb{R}$

Si $A \neq C$
y $A \cdot C > 0$
la ecuación representa:

- una elipse —no circunferencia— con ejes paralelos a los coordenados

o

- un punto
- ningún conjunto de puntos (ϕ)

54

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A,C,D,E,F \in \mathbb{R}$

si $(A = 0 \wedge C \neq 0)$ o bien $(C = 0 \wedge A \neq 0)$
la ecuación representa:

- una parábola con eje paralelo a uno de los ejes coordenados
- dos rectas paralelas
- una recta
- ningún conjunto de puntos (ϕ)

55

En resumen;
una ecuación incompleta de segundo grado de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A,C,D,E,F \in \mathbb{R}$

puede representar:

- una cónica { circunferencia, elipse (no circunferencia), hipérbola, parábola } con ejes paralelos a los coordenados
- una cónica degenerada, o
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano (ϕ).

56

Ahora bien,

la ecuación completa de segundo grado

tiene la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$$

- F: Término independiente.
- $Dx + Ey$: Términos lineales o de 1^{er} grado.
- Bxy: Término rectangular.
- $Ax^2 + Cy^2$: Términos cuadráticos o de 2^o grado.

57

Veremos que una ecuación completa de segundo grado, de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$

puede representar:

una cónica,
una cónica degenerada,
o
ningún conjunto de puntos (ϕ).

58

$$Ax^2 + \textcircled{Bxy} + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La presencia del **término rectangular** ($B \neq 0$) nos indicará que **los ejes de la cónica no son paralelos a los coordenados.**

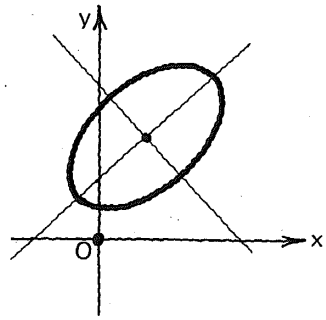
59

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $B \neq 0$

puede representar, por ejemplo, un conjunto de puntos como el indicado en la gráfica.



60

Se nos presenta, ahora, el problema de determinar la naturaleza del conjunto de puntos representado por una ecuación dada de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $B \neq 0$

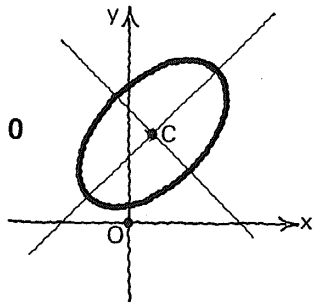
61

Supongamos que
una cierta ecuación
de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $B \neq 0$

representa la elipse mostrada.

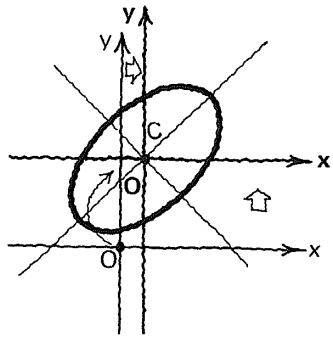


62

Podemos empezar
efectuando una

traslación de los ejes coordenados

de modo que el
origen O coincida
con el centro de la
elipse, con lo cual
la ecuación se verá
simplificada en
cierta medida.

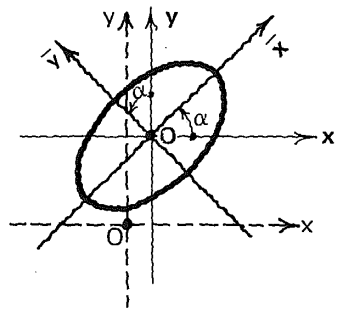


63

Ahora, para conocer
las características
de la elipse
es necesario
efectuar una

rotación de los ejes coordenados

de manera
que coincidan
con los ejes de la elipse.

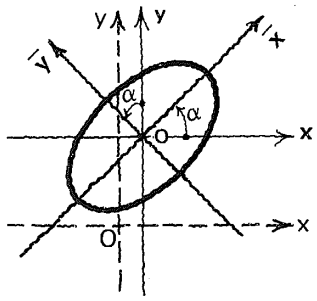


64

La ecuación,
referida a este
último sistema
$(\bar{x}o\bar{y})$, asumirá

la forma más simple,

y nos permitirá
conocer las
características del
conjunto de puntos
representado.



65

Los dos movimientos
de los ejes coordenados
pueden ser realizados
en orden inverso.
Si seguimos suponiendo
que la ecuación original

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa
una elipse, una

rotación de los ejes

producirá una
ecuación de la forma

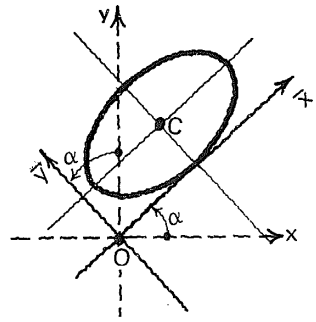
$$A\bar{x}^2 + C\bar{y}^2 + D\bar{x} + E\bar{y} + F = 0$$

o bien, de alguna
de las formas:

$$\frac{(\bar{x} - h)^2}{a^2} + \frac{(\bar{y} - k)^2}{b^2} = 1$$

ó

$$\frac{(\bar{x} - h)^2}{b^2} + \frac{(\bar{y} - k)^2}{a^2} = 1$$



Los ejes $\bar{x}$ e $\bar{y}$
son paralelos a
los ejes de la elipse.

66

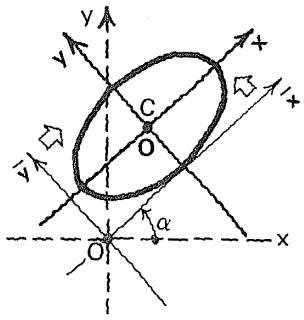
La **traslación de los ejes,** al hacer coincidir el origen con el centro de la elipse, simplificará la ecuación, dándole la forma

$$Ax^2 + By^2 + F = 0$$

o alguna de las siguientes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



67

Ahora estudiaremos la forma de realizar

la rotación de los ejes coordenados.

68

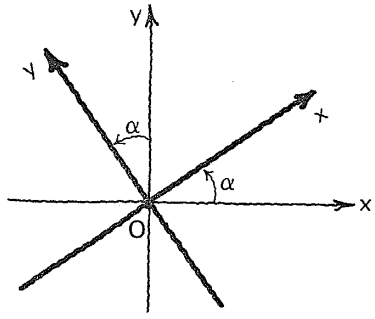
Sea

xoy

el sistema coordenado inicial, y

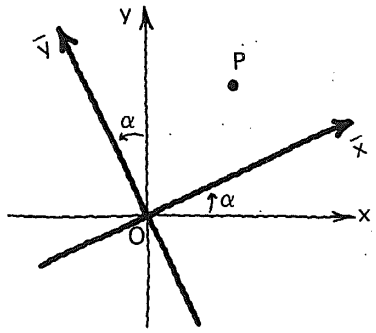
$\bar{x}$ o $\bar{y}$

el sistema resultante una vez efectuada la rotación de los ejes un ángulo α.



69

Consideremos un punto cualquiera P = (x,y) con respecto al sistema inicial, y P = $(\bar{x}, \bar{y})$ con respecto al nuevo sistema, una vez efectuada la rotación.



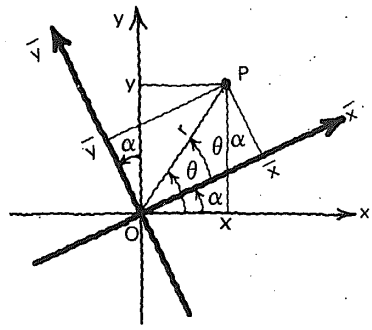
70

Observemos cuidadosamente esta figura en que a la distancia no dirigida de O a P le hemos llamado r.

Escribimos:

$\bar{x} = r \cos(\theta - \alpha)$.

$\bar{y} =$ [ ]



r sen $(\theta - \alpha)$

71

$\bar{x} = r \cos(\theta - \alpha)$
$\bar{y} = r \operatorname{sen}(\theta - \alpha)$

Utilizando las identidades para el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos, podemos transformar las ecuaciones anteriores en la siguiente forma:

$\bar{x} =$ [ ]

$\bar{y} =$ [ ]

$r(\cos\theta \cos\alpha + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha)$
o bien
- $r \cos\theta \cos\alpha + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha$

$r(\operatorname{sen}\theta \cos\alpha - \cos\theta \operatorname{sen}\alpha)$
ó
- $r \operatorname{sen}\theta \cos\alpha - r \cos\theta \operatorname{sen}\alpha$

72

$$\bar{x} = r \cos\theta \cos\alpha + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha$$
$$\bar{y} = r \operatorname{sen}\theta \cos\alpha - r \cos\theta \operatorname{sen}\alpha$$

Pero, observamos en la figura del cuadro 70, que:

$r \cos\theta =$ [ ]
$r \operatorname{sen}\theta =$ [ ]

x
y

73

Sustituyendo

$\mathbf{r \cos\theta = x}$
y
$\mathbf{r \operatorname{sen}\theta = y}$

en $\begin{cases} \bar{x} = r \cos\theta \cos\alpha + r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha \\ \bar{y} = r \operatorname{sen}\theta \cos\alpha - r \cos\theta \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

obtenemos:

[ ]

[ ]

$\bar{x} = x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha$

$\bar{y} = y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha$

74

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = \bar{x}$$
$$-x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha = \bar{y}$$

Resolviendo para x e y este sistema, obtenemos:

[ ]

$x =$ [ ]

$y =$ [ ]

Respuesta
en el cuadro
siguiente

Por ejemplo, por determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \bar{x} & \operatorname{sen}\alpha \\ \bar{y} & \cos\alpha \end{vmatrix} = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \bar{x} \\ -\operatorname{sen}\alpha & \bar{y} \end{vmatrix} = \bar{y}\cos\alpha + \bar{x}\operatorname{sen}\alpha$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\operatorname{sen}\alpha$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \bar{x}\operatorname{sen}\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$

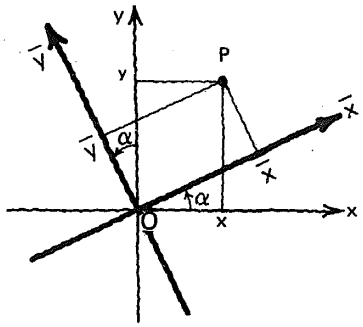
75

Hemos obtenido las siguientes

ecuaciones de rotación de ejes

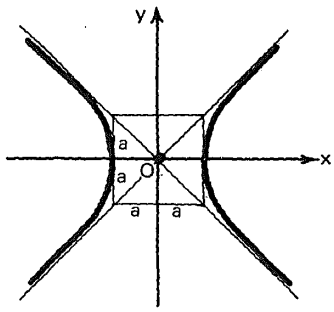
$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\operatorname{sen}\alpha$$

$$y = \bar{x}\operatorname{sen}\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$



76

Para ver cómo funciona esto, consideremos la hipérbola equilátera horizontal mostrada, una de cuyas ecuaciones es



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

o bien

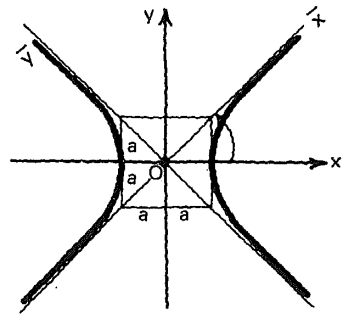
$$x^2 - y^2 = a^2$$

77

Vamos a efectuar una rotación de los ejes a través de un ángulo

$\alpha =$ [ ]

de tal modo que los nuevos ejes coincidan con las asíntotas de la hipérbola.



45° (ó $\frac{\pi}{4}$ radianes)

78

Ecuación dada:

$x^2 - y^2 = a^2$.

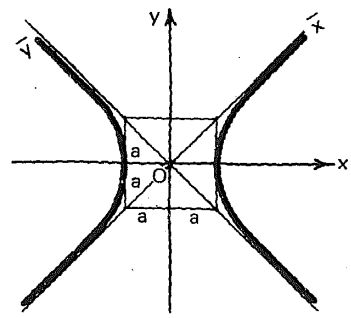
Ecuaciones de rotación de ejes:

$x =$ [ ]

$y =$ [ ]

que sustituimos en la ecuación dada para obtener

[ ]



$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \operatorname{sen} \alpha$

$y = \bar{x} \operatorname{sen} \alpha + \bar{y} \cos \alpha$

$(\bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \operatorname{sen} \alpha)^2 - (\bar{x} \operatorname{sen} \alpha + \bar{y} \cos \alpha)^2 = a^2$

79

$(\bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \operatorname{sen} \alpha)^2 - (\bar{x} \operatorname{sen} \alpha + \bar{y} \cos \alpha)^2 = a^2$

↓

Desarrollamos los binomios cuadráticos y efectuamos las transformaciones necesarias para expresar la ecuación resultante en la forma más simple posible

[ ]

↓

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con atención.

- $\bar{x}^2\cos^2\alpha - 2\bar{x}\bar{y}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + \bar{y}^2\text{sen}^2\alpha - (\bar{x}^2\text{sen}^2\alpha + 2\bar{x}\bar{y}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + \bar{y}^2\cos^2\alpha) = a^2$
- $\bar{x}^2\cos^2\alpha - 2\bar{x}\bar{y}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + \bar{y}^2\text{sen}^2\alpha - \bar{x}^2\text{sen}^2\alpha - 2\bar{x}\bar{y}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha - \bar{y}^2\cos^2\alpha = a^2$

$$\bar{x}^2\ (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) - y^2\ (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) - 4\,\bar{x}\bar{y}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = a^2$$

$$\bar{x}^2\cos 2\alpha - y^2\cos 2\alpha - 2\bar{x}\bar{y}\,\text{sen}\,2\alpha = a^2$$

para $\alpha = 45°$
$\cos 2\alpha = \cos 90° = 0$
$\text{sen}\,2\alpha = \text{sen}\,90° = 1$

de donde:

- $-2\bar{x}\bar{y} = a^2$

ó

- $\bar{x}\bar{y} = -\dfrac{a^2}{2}$

80

Hemos obtenido
una ecuación de una

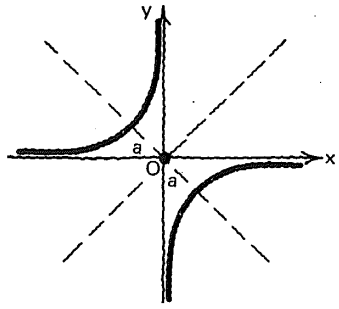
hipérbola rectangular

como la indicada en la gráfica,
que podemos escribir:

xy = k

en que $k = -\dfrac{a^2}{2}$

Las asíntotas de esta hipérbola particular son los ejes coordenados.



81

Si el ángulo de rotación es
$\alpha = -45°$, de

$\bar{x}^2\cos 2\alpha - \bar{y}^2\cos 2\alpha - 2\,xy\,\text{sen}\,2\alpha = a^2$

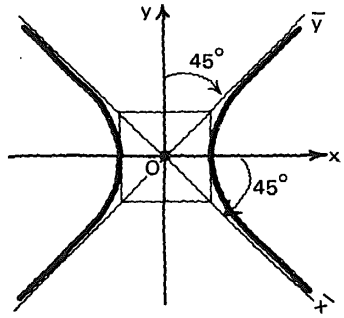
obtenemos

[ ]

puesto que:

$\cos 2\alpha =$ [ ]

$\text{sen}\,2\alpha =$ [ ]

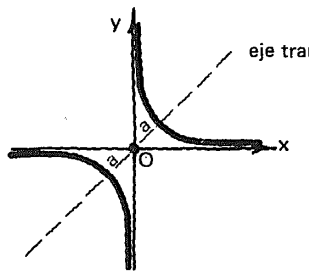


$\bar{x}\bar{y} = \dfrac{a^2}{2}$

$\cos(-90°) = 0$
$\text{sen}(-90°) = -1$

82

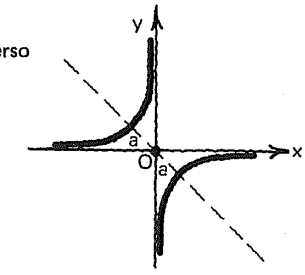
Tomemos nota de estas hipérbolas especiales.



Hipérbola rectangular en el 1.° y 3.° cuadrantes.

$$xy = k$$

$$k = \frac{a^2}{2}$$



Hipérbola rectangular en el 2.° y 4.° cuadrantes.

$$xy = k'$$

$$k' = -\frac{a^2}{2}$$

6.7.2.1

Práctica de trazo de la gráfica de una ecuación de la forma $xy = k$ dando las características de la curva representada, si se considera necesario.

83

Nuestra atención se centrará ahora en la

simplificación de una ecuación completa de segundo grado

de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

$A,B,C,D,E,F \in \mathcal{R}$

84

Una primera simplificación
la podemos obtener

"haciendo desaparecer"
el término rectangular Bxy

mediante la

rotación de los ejes coordenados

a través de un cierto ángulo,
cuya medida nos propondremos
determinar.

85

Sea, entonces, la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que vamos a simplificar al transformarla
en una ecuación de la forma

$$A\bar{x}^2 + C\bar{y}^2 + D\bar{x} + E\bar{y} + F = 0$$

mediante la rotación de los ejes coordenados
a través de un cierto ángulo α.

86

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vamos a sustituir en esta ecuación:

$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$$
$$y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$

para obtener:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

87

$A(\overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\operatorname{sen}\alpha)^2$
$+ B(\overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\operatorname{sen}\alpha)(\overline{x}\operatorname{sen}\alpha + \overline{y}\cos\alpha)$
$+ C(\overline{x}\operatorname{sen}\alpha + \overline{y}\cos\alpha)^2 + D(\overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\operatorname{sen}\alpha)$
$+ E(\overline{x}\operatorname{sen}\alpha + \overline{y}\cos\alpha) + F = 0$

Desarrollemos los binomios cuadráticos y efectuemos el producto indicado en el segundo término.

Respuesta en el cuadro siguiente

88

$A(\overline{x}^2\cos^2\alpha - 2\,\overline{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \overline{y}^2\operatorname{sen}^2\alpha)$

$+ B(x^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \overline{xy}\cos^2\alpha - \overline{xy}\operatorname{sen}^2\alpha - \overline{y}^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)$

$+ C(\overline{x}^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\,\overline{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \overline{y}^2\cos^2\alpha)$

$+ D(\overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\operatorname{sen}\alpha)$

$+ E(\overline{x}\operatorname{sen}\alpha + \overline{y}\cos\alpha) + F = 0$

Efectuemos todos los productos indicados.

Respuesta en el cuadro siguiente

89

$A\overline{x}^2\cos^2\alpha - 2A\overline{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + A\overline{y}^2\operatorname{sen}^2\alpha$
$+ B\overline{x}^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B\overline{xy}\cos^2\alpha - B\overline{xy}\operatorname{sen}^2\alpha - B\overline{y}^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
$+ C\overline{x}^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2C\overline{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\overline{y}^2\cos^2\alpha$
$+ D\overline{x}\cos\alpha - D\overline{y}\operatorname{sen}\alpha$
$+ E\overline{x}\operatorname{sen}\alpha + E\overline{y}\cos\alpha + F = 0$

Factoricemos los términos en $\overline{x}^2$, en $\overline{xy}$, en $\overline{y}^2$, en $\overline{x}$, en $\overline{y}$ y agrupemos los términos independientes.

Respuesta en el cuadro siguiente

90

$(A \cos^2 \alpha + B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha)\ \overline{x}^2$
$+ (-2A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + B \cos^2 \alpha - B \operatorname{sen}^2 \alpha + 2C \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)\ \overline{xy}$
$+ (A \operatorname{sen}^2 \alpha - B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha)\ \overline{y}^2$
$+ (D \cos \alpha + E \operatorname{sen} \alpha)\ \overline{x} + (-D \operatorname{sen} \alpha + E \cos \alpha)\ \overline{y} + F = 0$

Puesto que la ecuación referida al nuevo sistema de ejes no debe contener término en $\overline{xy}$, debe verificarse que:

Respuesta en el cuadro siguiente.

91

$-2A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + B \cos^2 \alpha - B \operatorname{sen}^2 \alpha + 2C \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$
o
$2A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - B \cos^2 \alpha + B \operatorname{sen}^2 \alpha - 2C \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$

Esta es una ecuación trigonométrica que debemos resolver para α.
Empecemos por expresarla en términos de 2α.

Respuesta en el cuadro siguiente

92

$2A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - B(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 2C \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$

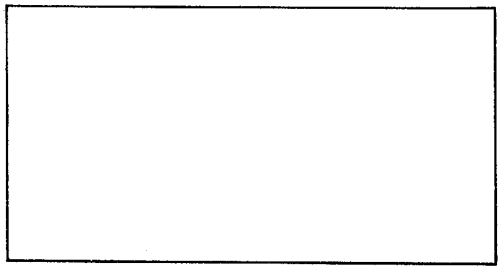
$A \operatorname{sen} 2\alpha - B \cos 2\alpha - C \operatorname{sen} 2\alpha = 0$

Para expresar esta ecuación en términos de una sola función trigonométrica, dividamos ambos miembros entre $\cos 2\alpha$.

Respuesta en el cuadro siguiente

$A \tan 2\alpha - B - C \tan 2\alpha = 0$

Resolvamos ahora, para $\tan 2\alpha$.



$(A-C) \tan 2\alpha - B = 0$

$(A-C) \tan 2\alpha = B$

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

93

De modo que, la medida del ángulo de rotación requerida para hacer desaparecer el término rectangular, puede obtenerse de:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

94

Queremos conocer, por ejemplo, las características del conjunto de puntos representado por la ecuación

$$x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$$

y nos interesa una ecuación expresada en la forma más simple posible.

95

Vamos a efectuar primero una

rotación de los ejes iniciales
a fin de

eliminar el término rectangular.

La medida del ángulo α a través del cual vamos a hacer girar los ejes iniciales, puede obtenerse de la expresión:

$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$

96

como: $\begin{cases} A = \\ B = \\ C = \end{cases}$

$\tan 2\alpha =$ =

1
1
1

$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ número no definido.

97

Sabemos que la tangente de un ángulo (2α) no está definida para $2\alpha =$

$(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$

98

En el intervalo $0 \leqslant 2\alpha < \pi$,
que es el que nos interesa,
tomamos k = [ ]

y 2α = [ ]

de donde α = [ ]

0

$\frac{\pi}{2}$ (ó 90°)

$\frac{\pi}{4}$ (ó 45°)

99

Al saber que $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$,

las ecuaciones de rotación de los ejes serán:

x = [ ] = [ ]

y = [ ] = [ ]

↑ expresiones generales

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y})$

$\bar{x} \operatorname{sen} \alpha + \bar{y} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y})$

100

Sustituimos

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y})$$

y

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y})$$

en

$$x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$$

para obtener:

[ ]

$\frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{y})^2 + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} + \bar{y})$

$+ \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y})^2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) - 6 = 0$

ó

$(\bar{x} - \bar{y})^2 + (\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} + \bar{y})$
$+ (\bar{x} + \bar{y})^2 - 3\sqrt{2}(\bar{x} + \bar{y}) - 12 = 0$

101

$(\bar{x}-\bar{y})^2 + (\bar{x}-\bar{y})(\bar{x}+\bar{y}) + (\bar{x}+\bar{y})^2 - 3\sqrt{2}(\bar{x}+\bar{y}) - 12 = 0$

Desarrollemos los binomios cuadráticos y efectuemos los productos indicados en el primer miembro, haciendo la reducción de términos semejantes.

$\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + \bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\bar{x} - 3\sqrt{2}\bar{y} - 12 = 0$

$3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\bar{x} - 3\sqrt{2}\bar{y} - 12 = 0$

102

Expresada la ecuación en esta forma

$$3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\,\bar{x} - 3\sqrt{2}\,\bar{y} - 12 = 0$$

sabemos que puede representar:

- una elipse —no circunferencia—
- un punto o
- ningún conjunto de puntos

pues se verifica que

$\bar{A} \neq \bar{C}$ y $\bar{A}\bar{C} > 0$ } $\bar{A}$ y $\bar{C}$ son diferentes y del mismo signo

103

El siguiente paso consiste en hacer una

traslación de los ejes del sistema $\bar{x}$ o $\bar{y}$

de manera que el origen del nuevo sistema coincida con el centro de la elipse.

Determinemos, entonces, este centro, expresando la ecuación en alguna de las formas:

ó

$$\frac{(\bar{x}-h)^2}{a^2} + \frac{(\bar{y}-k)^2}{b^2} = 1$$

ó

$$\frac{(\bar{x}-h)^2}{b^2} + \frac{(\bar{y}-k)^2}{a^2} = 1$$

104

Estado inicial. $3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\,\bar{x} - 3\sqrt{2}\,\bar{y} - 12 = 0$

transformaciones:

Estado final:

$3\bar{x}^2 - 3\sqrt{2}\bar{x} + \bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\bar{y} = 12$

$3(\bar{x}^2 - \sqrt{2}\bar{x}) + (\bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\bar{y}) = 12$

$3(\bar{x}^2 - \sqrt{2}\bar{x} + \frac{1}{2}) + (\bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\bar{y} + \frac{9}{2}) = 18$

$3(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\bar{y} - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 = 18$

$\frac{(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{6} + \frac{(\bar{y} - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2}{18} = 1$

105

El origen del sistema, después de la traslación, es el punto

$O =$

y la ecuación referida a este nuevo sistema (**xoy**) puede escribirse así:

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

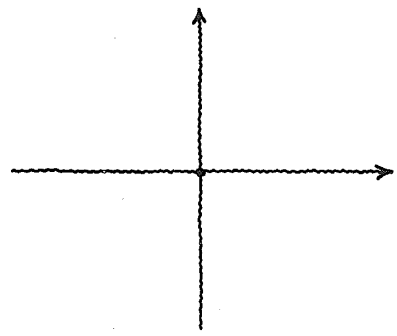
$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{18} = 1$

ó

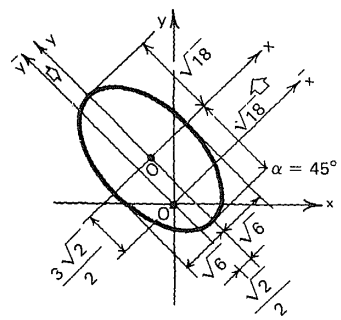
$3x^2 + y^2 = 18$

106

Tracemos la gráfica cartesiana, indicando los tres sistemas de ejes coordenados



Sistema inicial.



107

Atención.

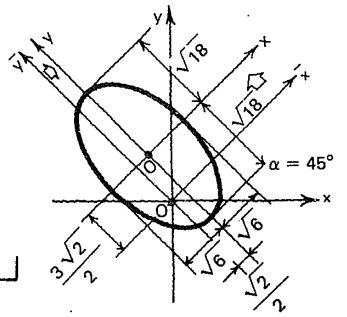
Necesitamos, ahora, determinar el centro de la elipse referido al sistema inicial (xoy).

Empleamos las ecuaciones de rotación:

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) =$ [ ]

e

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) =$ [ ]



- $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -1$
- $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2$

Verificar en la gráfica.

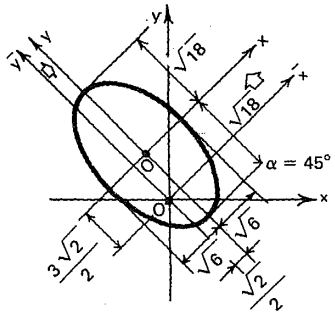
108

Ahora sabemos que la ecuación

$x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$

representa una elipse con las siguientes características respecto del sistema coordenado inicial (xoy).

- Centro = [ ]
- Eje focal formando un ángulo de [ ] grados con el eje y.
- Semieje mayor = [ ]
- Semieje menor = [ ]



(−1, 2)

45

$\sqrt{18}$

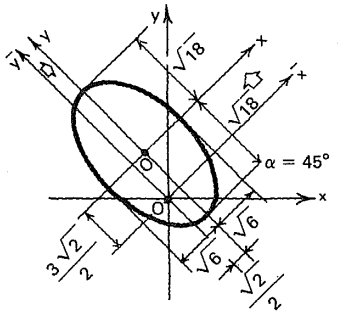
$\sqrt{6}$

109

Vamos a determinar ahora, a manera de verificación, los puntos de intersección de la elipse

$x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$

con los ejes coordenados del sistema inicial (x e y).

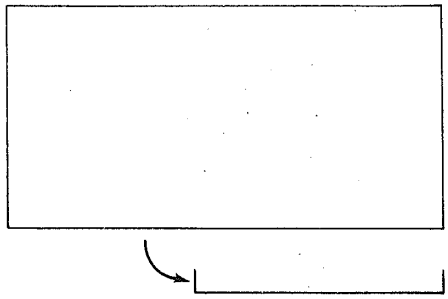


110

Intersección de la elipse:

$$x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$$

con el eje y.



Para $x = 0$ obtenemos:

$y^2 - 3y - 6 = 0$

de donde:

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2}$$

$$y \doteq \frac{3 \pm 5.74}{2}$$

$y_1 \doteq 4.37$
$y_2 \doteq -1.37$

- (0, 4.37)
- (0, −1.37)

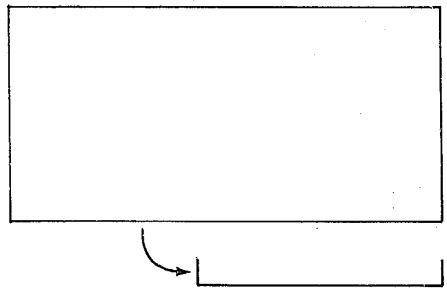
Verificar en la gráfica.

111

Intersección de la elipse:

$$x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$$

con el eje x.



Para $y = 0$ obtenemos:

$$x^2 - 6 = 0$$

de donde:

$$x = \pm \sqrt{6} \doteq \pm 2.45$$

- (2.45, 0)
- (−2.45, 0)

Verificar en la gráfica.

112

Una ecuación de la elipse representada con referencia al sistema coordenado inicial (xoy) es:

$$x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0.$$

Una ecuación de la misma elipse, referida al sistema $\bar{x}o\bar{y}$, cuyos ejes forman un ángulo de 45° con los del sistema inicial es:

$$3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 3\sqrt{2}\,\bar{x} - 3\sqrt{2}\,\bar{y} - 12 = 0$$

Otras ecuaciones de la misma elipse, referidas al sistema **xoy**, obtenido por una traslación de ejes al centro de la elipse, son: $3x^2 + y^2 = 18$ ó $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{18} = 1$

113

Otro ejemplo.

Se requiere simplificar la ecuación

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$$

determinando la naturaleza del conjunto de puntos representado.

114

Ecuación dada

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0.$$

Para efectuar la rotación de ejes que elimine el término rectangular, calculamos:

$\tan 2\alpha =$ [ ] $=$ [ ]

$A = 3$
$B = -10$
$C = 3$

$$\frac{B}{A - C} = \frac{-10}{3 - 3}$$

= número no definido

115

$\tan 2\alpha =$ número no definido,

por lo tanto:

$2\alpha =$ [ ]

y

$\alpha =$ [ ]

$2\alpha = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Para el intervalo $0 \leqslant 2\alpha < \pi$ $(k = 0)$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$

$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$

116

Sabiendo que $\alpha = 45°$ ($\pi/4$ radianes), las ecuaciones de rotación:

$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$$

y

$$y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$

toman la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \bar{x}\cos 45° - \bar{y}\,\text{sen}\,45° \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} \\ y = \bar{x}\,\text{sen}\,45° + \bar{y}\cos 45° \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} \end{array}\right.$$

- $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y})$
- $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y})$

117

Sustituyendo:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y})$$

e

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y})$$

en la ecuación original

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$$

se obtiene:

$$\frac{3}{2}(\bar{x}-\bar{y})^2 - 5(\bar{x}-\bar{y})(\bar{x}+\bar{y}) + \frac{3}{2}(\bar{x}+\bar{y})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x}-\bar{y}) - 32 = 0$$

118

$\frac{3}{2}(\bar{x}-\bar{y})^2 - 5(\bar{x}-\bar{y})(\bar{x}+\bar{y}) + \frac{3}{2}(\bar{x}+\bar{y})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x}-\bar{y}) - 32 = 0$

simplificar.

Respuesta en el cuadro siguiente

$3(\bar{x}-\bar{y})^2 - 10(\bar{x}-\bar{y})(\bar{x}+\bar{y}) + 3(\bar{x}+\bar{y})^2 + \sqrt{2}(\bar{x}-\bar{y}) - 64 = 0$

$3(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) - 10(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + 3(\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2) + \sqrt{2}\,(\bar{x}-\bar{y}) - 64 = 0$

$3\bar{x}^2 - 6\bar{x}\bar{y} + 3\bar{y}^2 - 10\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2 + 3\bar{x}^2 + 6\bar{x}\bar{y} + 3\bar{y}^2 + \sqrt{2}\,\bar{x} - \sqrt{2}\,\bar{y} - 64 = 0$

$-4\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 + \sqrt{2}\,\bar{x} - \sqrt{2}\,\bar{y} - 64 = 0$

ó

$\mathbf{4\bar{x}^2 - 16\bar{y}^2 - \sqrt{2}\,\bar{x} + \sqrt{2}\,\bar{y} + 64 = 0}$

119

La ecuación

$$\mathbf{3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0}$$

referida al nuevo sistema de ejes toma la forma

$$\mathbf{4\bar{x}^2 - 16\bar{y}^2 - \sqrt{2}\,\bar{x} + \sqrt{2}\,y + 64 = 0}$$

Expresada así, sabemos que la ecuación representa

una hipérbola, o un par de rectas concurrentes.

120

Efectuando una traslación de los ejes coordenados, de manera que el origen del nuevo sistema coincida con el centro de la hipérbola, la ecuación $\mathbf{4\bar{x}^2 - 16\bar{y}^2 - \sqrt{2}\,\bar{x} + \sqrt{2}\,\bar{y} + 64 = 0}$

se transforma en

Respuesta en el cuadro siguiente

$4\bar{x}^2 - \sqrt{2}\,\bar{x} - 16\bar{y}^2 + \sqrt{2}\,y = -64$

$4\left(\bar{x}^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\bar{x}\right) - 16\left(\bar{y}^2 + \frac{\sqrt{2}}{16}\bar{y}\right) = -64$

$4\left(\bar{x}^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\bar{x} + \frac{1}{32}\right) - 16\left(\bar{y}^2 + \frac{\sqrt{2}}{16}\bar{y} + \frac{1}{512}\right) = -\frac{18\,409}{288} = -63.92$

$4\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 - 16\left(\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{32}\right)^2 = -63.92$

$\frac{\left(\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{32}\right)^2}{15.98} - \frac{\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2}{3.99} = 1$

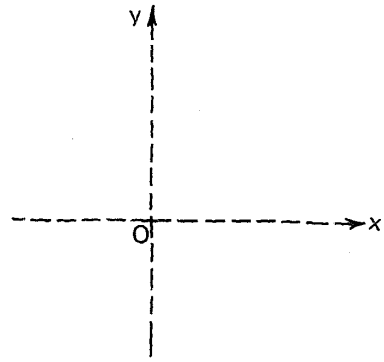
o en forma aproximada:

$\frac{(\bar{y} + 0.044)^2}{16} - \frac{(\bar{x} - 0.177)^2}{4} = 1$

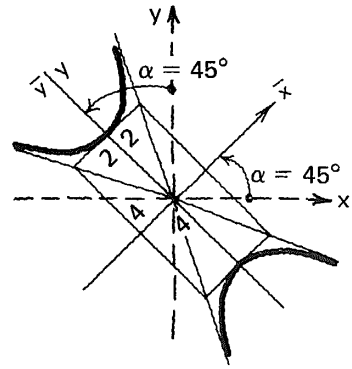
$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

121

Trazar la gráfica cartesiana, indicando los tres sistemas de ejes



Sistema inicial



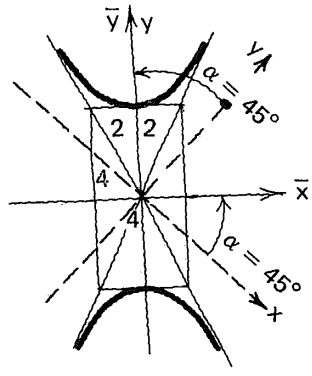
122

La ecuación dada inicialmente

$3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$

representa una hipérbola con

- centro en [ ]
- semieje transverso = [ ]
- semieje conjugado = [ ]
- con eje focal formando un ángulo de [ ] con el eje x.



$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{32}\right) = \frac{5}{32}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{32}\right) = \frac{3}{32}$

$C = \left(\frac{5}{32}, \frac{3}{32}\right)$

4

2

45°

123

Con respecto al sistema de ejes coordenados inicial (xoy) la ecuación de la hipérbola es

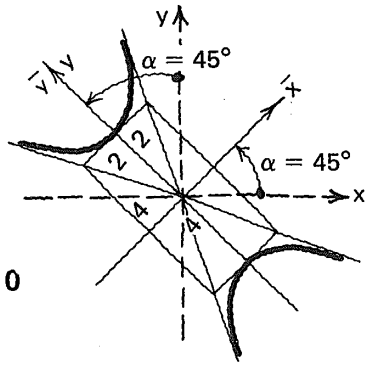
$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$$

Con respecto al sistema $\bar{x}o\bar{y}$, resultante de una **rotación de los ejes** a través de un ángulo de 45°, la ecuación toma la forma

$$4\bar{x}^2 - 16\bar{y}^2 - \sqrt{2}\,\bar{x} + \sqrt{2}\,\bar{y} + 64 = 0$$

o en forma aproximada:

$$\frac{(\bar{y} + 0.044)^2}{16} - \frac{(\bar{x} - 0.177)^2}{4} = 1$$



124

Con respecto al sistema **xoy**, resultante de una **traslación de los ejes** del sistema $\bar{x}o\bar{y}$, al centro de la hipérbola.

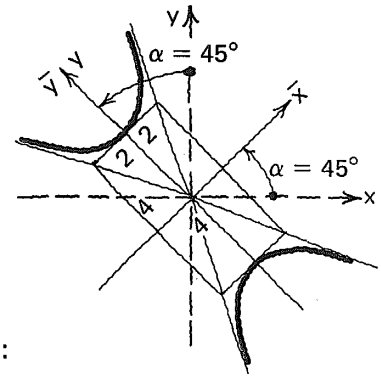
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{32}\right)$$

o en forma aproximada:

(0.177, − 0.044)

la ecuación queda simplificada a:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} \doteq 1$$



6.7.2.2

Práctica adicional de simplificación de una ecuación dada en la forma
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
con $B \neq 0$
mediante una rotación y una traslación de los ejes coordenados, dando las características del conjunto de puntos representado, si se considera necesario.

6.7.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las expresiones

  $x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \operatorname{sen} \alpha$
  e
  $y = \bar{x} \operatorname{sen} \alpha + \bar{y} \cos \alpha$

  para la rotación de ejes coordenados;

- *trazar* la gráfica de una ecuación de la forma $xy = k$, dando las características de la curva representada;

- *simplificar* una ecuación dada en la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $B \neq 0$, mediante una rotación y una traslación de los ejes coordenados, dando las características del conjunto de puntos representado.

7.3

La ecuación completa de segundo grado con dos variables

125

Puede demostrarse que una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $A,B,C,D,E,F \in \mathcal{R}$

puede representar:

- una cónica:
  - elipse
  - hipérbola
  - parábola
- una cónica degenerada

  o
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

126

La expresión

$$B^2 - 4AC$$

se denomina **discriminante** de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y determina la naturaleza del conjunto de puntos representado por la ecuación.

Vea cuadros siguientes.

127

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $B^2 - 4AC < 0$

la ecuación representa
- una **elipse,**
- una **elipse degenerada,**

o

- ningún conjunto de puntos (ϕ)

128

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $B^2 - 4AC > 0$

la ecuación representa
- una **hipérbola**

o

- una **hipérbola degenerada.**

129

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si $B^2 - 4AC = 0$

la ecuación representa
- una **parábola,**
- una **parábola degenerada,**

o

- ningún conjunto de puntos (ϕ)

130

De acuerdo con el criterio anterior
la ecuación $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 4 = 0$

representa [ ]

puesto que $B^2 - 4AC$ [ ]

- una elipse,
- una elipse degenerada
  o
- ϕ

$= (-2)^2 - 4(2)(1) = 4 - 8 = -4$
y
$-4 < 0$

131

Mediante una rotación y una traslación
de los ejes cartesianos, simplificar la ecuación

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 4 = 0$$

para determinar las características
del conjunto de puntos representado.

132

1. Rotación de los ejes

1.1 Determinación del ángulo de rotación (en grados).

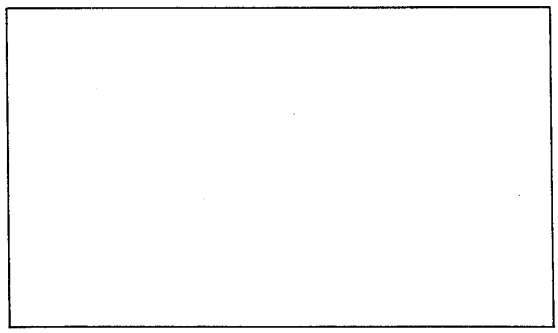
$A = 2;\ B = -2;\ C = 1$

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-2}{2-1} = -2$$

$$2\alpha \doteq 116.57^\circ$$
$$\alpha \doteq 58.285^\circ$$

133

1.2 Ecuaciones de rotación de ejes.

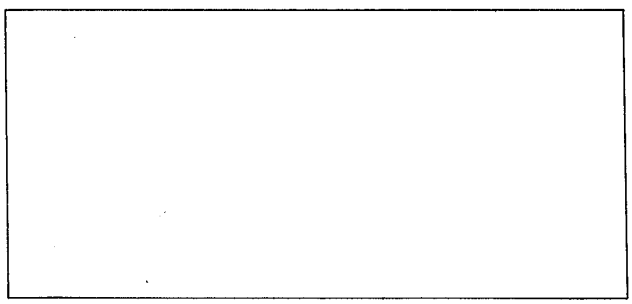


$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$$
$$x \doteq 0.53\,\bar{x} - 0.85\,\bar{y}$$

$$y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$
$$y \doteq 0.85\,\bar{x} + 0.53\,\bar{y}$$

134

1.3 Obtención de la ecuación referida al sistema $\bar{x}o\bar{y}$, después de la rotación de los ejes del sistema xoy a través de un ángulo de 58.285°



Respuesta en el cuadro siguiente

En $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 4 = 0$

Sustituimos

$x \doteq 0.53\,\bar{x} - 0.85\,\bar{y}$

$y = 0.85\,\bar{x} + 0.53\,\bar{y}$

- $2(0.53\bar{x} - 0.85\bar{y})^2 - 2(0.53\bar{x} - 0.85\bar{y})(0.85\bar{x} + 0.53\bar{y})$
  $+ (0.85\bar{x} + 0.53\bar{y})^2 - 2(0.53\bar{x} - 0.85\bar{y}) + 4 = 0$
- $2(0.28\bar{x}^2 - 0.90\bar{x}\bar{y} + 0.72\bar{y}^2) - 2(0.45\bar{x}^2 + 0.28\bar{x}\bar{y} - 0.72\bar{x}\bar{y} - 0.45\bar{y}^2)$
  $+ (0.72\bar{x}^2 + 0.90\bar{x}\bar{y} + 0.28\bar{y}^2) - 2(0.53\bar{x} - 0.85\bar{y}) + 4 = 0$
- $0.56\bar{x}^2 - 1.80\bar{x}\bar{y} + 1.44\bar{y}^2 - 0.90\bar{x}^2 - 0.56\bar{x}\bar{y} + 1.44\bar{x}\bar{y} + 0.90\bar{y}^2$
  $+ 0.72\bar{x}^2 + 0.90\bar{x}\bar{y} + 0.28\bar{y}^2 - 1.06\bar{x} + 1.70\bar{y} + 4 = 0$
- $0.38\bar{x}^2 + 2.62\bar{y}^2 - 1.06\bar{x} + 1.70\bar{y} + 4 = 0$*

* Se desprecia el término en $\bar{x}\,\bar{y}$.

135

2. Traslación de los ejes.

2.1 Transformación de la ecuación $0.38\bar{x}^2 + 2.62\bar{y}^2 - 1.06\bar{x} + 1.70\bar{y} + 4 = 0$ a la forma ordinaria para determinar el centro de la elipse.

- $0.38\bar{x}^2 - 1.06\bar{x} + 2.62\bar{y}^2 + 1.70\bar{y} = -4$
- $0.38(\bar{x}^2 - 2.79\bar{x}) + 2.62(\bar{y}^2 + 0.65\bar{y}) = -4$
- $0.38(\bar{x}^2 - 2.79\bar{x} + 1.95) + 2.62(\bar{y}^2 + 0.65\bar{y} + 0.11) = -2.97$
- $0.38(\bar{x} - 1.40)^2 + 2.62(\bar{y} + 0.33)^2 = -2.97$
- $\dfrac{(\bar{x} - 1.40)^2}{7.82} + \dfrac{(\bar{y} + 0.33)^2}{1.13} = -1$

136

Puesto que al intentar llevar la ecuación

$$0.38\bar{x}^2 + 2.62\bar{y}^2 - 1.06\bar{x} + 1.70\bar{y} + 4 = 0$$

a la forma ordinaria, obtenemos:

$$\frac{(\bar{x} - 1.40)^2}{7.82} + \frac{(\bar{y} + 0.33)^2}{1.13} = -1$$

que no puede ser satisfecha por ningún número real, concluimos que

la ecuación no representa ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

137

Podemos comprobar el resultado obtenido, en la siguiente forma:

1. Despejar **y** de la ecuación original:

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 4 = 0.$$

Para ello, reescribimos la ecuación así:

$$y^2 - 2x \cdot y + 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

Identificamos esta expresión como una ecuación de segundo grado de la forma

$$ay^2 + by + c = 0$$

en que:

a = 1
b = $-2x$
c = $2x^2 - 2x + 4$

138

$$y^2 - 2x \cdot y + 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

entonces:

$$y = \square$$

$$\frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2x^2 - 2x + 4)}}{2}$$

ó

$$x \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 4}$$

139

Para que de la expresión

$$\mathbf{y = x \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 4}}$$

obtengamos valores reales para y
se requiere que:

$$\square$$

$$-x^2 + 2x - 4 \geqslant 0$$

140

$$\mathbf{-x^2 + 2x - 4 \geqslant 0}$$

Recordemos que para determinar
el conjunto solución de una desigualdad
de segundo grado de la forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c \geqslant 0}$$

empezamos por calcular el signo del discriminante:

$$\mathbf{b^2 - 4ac.}$$

141

1. Si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, } entonces $ax^2 + bx + c$ es factorizable en $\mathcal{R}$, y el conjunto solución puede ser determinado por factorización.

2. Si $b^2 - 4ac < 0$ y 0 satisface la desigualdad, } entonces, el conjunto solución es igual a $\mathcal{R}$.

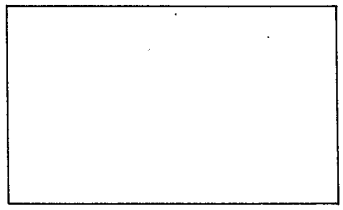
3. Si $b^2 - 4ac < 0$ y 0 no satisface la desigualdad, } entonces, el conjunto solución es igual a ϕ.

142

En el caso de la desigualdad

$$-x^2 + 2x - 4 \geqslant 0$$

se verifica
la condición [1,2 ó 3]



$3\ (b^2 - 4ac < 0)$

$b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-1)(-4)$
$= 4 - 16$
$= -12$
$-12 < 0$

143

Por lo tanto,
el conjunto solución de la desigualdad

$$-x^2 + 2x - 4 \geqslant 0$$

es igual a [ ]

ϕ

144

$$y = x \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 4}$$

Si el radical del segundo miembro no está definido para ningún número real, entonces, **y** no se define para ningún valor real de **x** y la ecuación

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 4 = 0$$

no se satisface para ningún par (x,y) de números reales. Esto significa que la ecuación considerada no representa ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

145

En conclusión,
una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,B,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

puede representar [ ]

- una cónica degenerada
- una cónica
  o
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano

146

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,B,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

representa
- una elipse,
- una elipse degenerada (punto)
  o
- ningún conjunto de puntos (ϕ)

Si [ ]

$B^2 - 4AC < 0$

147

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,B,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

representa:
- una hipérbola
  o
- una hipérbola degenerada
  (par de rectas concurrentes),

si [ ]

$B^2 - 4AC > 0$

148

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,B,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

representa:
- una parábola,
- una parábola degenerada
  (dos rectas paralelas, una recta)
  o
- ningún conjunto de puntos ϕ

si [ ]

$B^2 - 4AC = 0$

149

Ahora bien,
si en la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B = 0$
podemos escribir:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

150

Sabemos que
esta ecuación incompleta:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

representa:
- una **elipse** con sus ejes paralelos a los ejes coordenados,
- una elipse degenerada,
- o
- ningún conjunto de puntos ϕ

Si $B^2 - 4AC < 0$;
pero, como $B = 0$
$-4AC < 0$
ó $AC > 0$ A y C del mismo signo.

151

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

representa:
- una circunferencia (caso particular de elipse),
- una circunferencia degenerada (punto)
- o
- ningún conjunto de puntos

si además de $AC > 0$

$A = C$

152

Si en

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

$AC > 0 \wedge A = C$

la ecuación puede ser escrita en la forma

$$x^2 + y^2 + D^1x + E^1y + F^1 = 0$$

153

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

representa:
- una hipérbola con sus ejes paralelos a los coordenados
  o
- una hipérbola degenerada,

si $B^2 - 4AC$ [ ];
pero, como $B = 0$

Completar.

[ ]

[ ] > 0
$-4AC > 0$
ó
$AC < 0$ A y C de signo contrario

154

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A,C,D,E,F \in \mathcal{R}$$

representa:
- una parábola con su eje paralelo a alguno de los ejes coordenados,
- una parábola degenerada,
- una recta,
- o
- ningún conjunto de puntos ϕ

si $B^2 - 4AC$ [ ]

Completar.

[ ]

- [ ] $= 0$
- [ ] pero, como $B = 0$
  $-4AC = 0$
  ó
  $AC = 0$

6.7.3.1

Práctica adicional de determinación de la naturaleza del conjunto de puntos representado por una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ haciendo uso del discriminante $B^2 - 4AC$,
y
simplificando la ecuación mediante una rotación y una traslación de los ejes coordenados, si se considera necesario.

6.7.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la naturaleza del conjunto de puntos representado por una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ haciendo uso del discriminante $B^2 - 4AC$.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de agosto de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100

Bloque 6:

Geometría analítica

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

Bloque	Módulo	Módulo de resumen
1 **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café**	1- Conjuntos 2- Estructuras matemáticas 3- El conjunto de los enteros 4- Operaciones con enteros 5- Lenguaje algebraico 1. Formación 6- Lenguaje algebraico 2. Transformación 7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división 8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables 9- Operaciones con polinomios 3. Factorización 10- El conjunto de los racionales 11- Operaciones con expresiones racionales 12- El conjunto de los reales 13- Operaciones con expresiones reales 14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones	***MEMO 1*** *ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES*
2 **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde**	1- La ecuación como modelo matemático 2- Ecuaciones de primer grado 3- Sistemas de ecuaciones de primer grado 4- Desigualdades de primer grado 5- Ecuaciones de segundo grado 6- Desigualdades de segundo grado 7- La relación como modelo matemático 8- Funciones 9- Funciones exponenciales 10- Funciones logaritmicas 11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas 12- Resolución de problemas	***MEMO 2*** *ÁLGEBRA. MODELOS*
3 **NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA** **Libros color azul**	1- Lógica proposicional 1. Proposiciones 2- Lógica proposicional 2. Argumentos	***MEMO 3*** *NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA*
4 **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo**	1- Conjuntos de puntos 2- Relaciones binarias 3- Figuras planas 4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos. 5- Polígonos convexos 6- Relación de semejanza 7- Geometría métrica en el plano 8- Cuerpos geométricos	***MEMO 4*** *GEOMETRÍA EUCLIDIANA*
5 **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre**	1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo 2- Resolución de triángulos rectángulos 3- El círculo trigonométrico 4- Las funciones trigonométricas 5- Las funciones trigonométricas inversas 6- Identidades trigonométricas 7- Resolución de triángulos cualesquiera 8- Ecuaciones trigonométricas	***MEMO 5*** *TRIGONOMETRÍA*
6 **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado**	1- Introducción a la geometría analítica 2- La recta 3- La circunferencia 4- La elipse 5- La hipérbola 6- La parábola **7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado** 8- Relaciones y lugares geométricos	***MEMO 6*** *GEOMETRÍA ANALÍTICA*
7 **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa**	1- Introducción al cálculo diferencial 2- Límite de una función 3- Continuidad de una función 4- Derivación de funciones algebraicas 5- Derivación de funciones trascendentes 6- Extremos de una función (máximos y mínimos)	***MEMO 7*** *CÁLCULO DIFERENCIAL*
8 **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro**	1- Sumatoria y notación sigma 2- La integral definida y la integral indefinida 3- Integrales elementales 4- Métodos de integración 1 5- Métodos de integración 2 6- Algunas aplicaciones del cálculo integral	***MEMO 8*** *CÁLCULO INTEGRAL*

ISBN 968-24-0838-5